



Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/>
Eprints ID: 10538

Official URL:

<http://www.afm.asso.fr/Congr%C3%A8sFran%C3%A7aisdeM%C3%A9canique/CFM2011/tabid/356/Default.aspx>

To cite this version:

Bouyssier, Julien and Fehrenbach, Jérôme and De Gournay, Frédéric and Pierre, Charles and Plouraboué, Franck *Analyse de la convection-diffusion entre deux tubes parallèles plongés dans un domaine cylindrique*. (2011) In: 20ème Congrès Français de Mécanique (CFM 2011), 29 August 2011 - 02 September 2011 (Besançon, France).

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator:
staff-oatao@inp-toulouse.fr

Analyse de la convection-diffusion entre deux tubes parallèles plongés dans un domaine cylindrique

Julien Bouyssier^{a,b}, Jérôme Fehrenbach^d, Frédéric de Gournay^d, Charles Pierre^c, Franck Plouraboué^{a,b}

a. Université de Toulouse; INPT; UPS; IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse); Allée Camille Soula, F-31400 Toulouse, France

b. CNRS; IMFT; F-31400 Toulouse, France

c. Université de Pau et des Pays de l'Adour; UPPA; LMAP (Laboratoires de Mathématiques et de leurs Applications); Batiment IPRA av. de l'Université, F-64013 Pau, France

d. Institut de Mathématiques de Toulouse, CNRS and Université Paul Sabatier, Toulouse, France

Résumé :

Nous étudions la convection-diffusion tri-dimensionnelle entre tubes parallèles par une formulation théorique bi-dimensionnelle précédemment proposée. L'implémentation de cette formulation bi-dimensionnelle par éléments finis permet de calculer une vaste classe de configurations physique, hydrodynamiques et géométriques. Nous nous attachons à l'étude du champ de température et de l'évolution des flux en fonction du nombre de Péclet Pe , l'écart entre les deux tubes d , le rayon des tubes r et les vitesses des écoulements au sein des tubes.

Abstract :

We study three-dimensional convection-diffusion between parallel tubes using a previously proposed two-dimensional theoretical formulation. Finite element method implementation allows the computation of a wide range of physical, hydrodynamic and geometric configurations. We focus the study on both temperature and flux evolution between two convective tubes the radius of which is r , distant by d , when varying their inside velocity field through the Peclet number Pe .

Mots clefs : convection-diffusion ; problème de Graetz ; méthodes aux éléments finis

1 Introduction

Les problèmes de convection-diffusion entre tubes parallèles sont pertinents pour différents problèmes de transfert de chaleur ou de masse tels que les échangeurs à tubes, des micro-échangeurs convectifs, les planchers chauffant, ou les échanges de matières entre les vaisseaux sanguins et les tissus. Graetz [2] a étudié le champ de température au sein d'un tube dans lequel un écoulement de Poiseuille est établi en négligeant la diffusion axiale. Dans ce cas on cherche la solution T sous la forme de variable séparées du problème permettant la définition de valeurs et vecteurs propres λ et T_λ . On se ramène ainsi à un problème

aux valeurs propres. De plus des propriétés mathématiques de ce problème (notamment symétrique négatif) permettent de justifier une solution de la forme :

$$T(x, y, z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda T_\lambda(x, y) e^{\lambda z} \quad \text{ou } \Lambda \subset \mathbb{R}^- \quad (1)$$

Le problème de Graetz connaît plusieurs déclinaisons. Il s'en distingue deux : le problème de Graetz étendu, dans lequel le terme de diffusion axiale n'est plus omis, et le problème conjugué de Graetz dans lequel on rajoute une partie solide (par exemple autour du tube) où de la diffusion a lieu. Cependant le principe de résolution n'est plus aussi évident. Ainsi dans le cas conjugué la notion de problème aux valeurs propres n'est plus pertinente sur le domaine complet, c'est à dire fluide et solide. Concernant le cas étendu, la diffusion axiale permet l'apport d'informations dans le sens inverse de l'écoulement, il apparait donc dans ce cas des valeurs propres positives si bien que la propriété de symétrie négative du problème du Graetz n'est plus respectée. La décomposition de la solution sous la forme de (1) n'est plus possible. Ce sont les travaux de Papoutsakis et Ramakrishna [6, 7, 8] qui ont permis de surmonter ces difficultés dans le cas du problème étendu. Ils ont reformulé ce dernier en ajoutant à la température une seconde inconnue : le flux de température, décomposant ainsi l'équation d'advection-diffusion en deux équations différentielles du premier ordre. Ainsi ils se ramenèrent à un problème aux valeurs propres symétriques et pouvaient déterminer les coefficients c_λ . Des travaux [9, 10] ont permis de poser le cadre d'une formulation mathématique complète du problème de Graetz et de ces déclinaisons afin de décomposer la solution sous la forme (1). Cette formulation a récemment été étendue aux cas de domaines finis [11]. Dans un premier temps nous décrivons la formulation mathématique du problème de Graetz généralisé. Nous allons ensuite établir la formulation variationnelle. Nous mènerons une étude paramétrique sur les flux basée sur le nombre de Péclet de notre problème, les champs de vitesse, le rayon des tubes et la distances entre ces derniers.

2 Formulation théorique

Le domaine de section Ω est composé de trois parties : une première partie solide de section Ω_1 dans laquelle sont confinés deux tubes infinis de sections Ω_2 et Ω_3 d'axe \mathbf{e}_z . Les sections de ces trois parties sont comprises dans le plan (x, y) . Au sein des tubes un écoulement laminaire de la forme $\mathbf{v} = v(x, y)\mathbf{e}_z$ est établi. Dans chaque tube, nous considérons ici un profil parabolique de Poiseuille. Il vérifie $v|_{\Omega_i} = v_i$ avec $v_1 = 0$ et $v_{2,3} > 0$ ou < 0 .

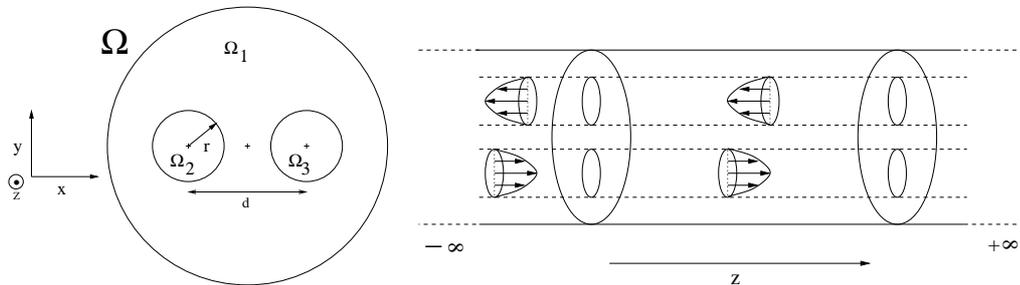


FIG. 1 – Configuration géométrique du problème : à gauche une coupe du domaine, à droite le domaine complet.

On définit sur la section Ω l'équation de conservation des flux adimensionnés :

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Pe v \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2)$$

k est la conductivité telle que $k = k(x, y)$ et $k|_{\Omega_i} = k_i$ et Pe est le nombre de Péclet de notre problème. A cela on doit rajouter des conditions de couplage aux interfaces fluide-solide :

$$T_i = T_j \text{ et } k_i \nabla T_i \cdot \mathbf{n}_{i,j} = k_j \nabla T_j \cdot \mathbf{n}_{i,j}, \text{ sur } \Gamma_{i,j}$$

avec $\Gamma_{i,j}$ qui est l'interface entre Ω_i et Ω_j et $\mathbf{n}_{i,j}$ la normale à $\Gamma_{i,j}$. On définit également des conditions aux limites de type Dirichlet sur la frontière du domaine $\partial\Omega$ avec un saut en $z = 0$:

$$\begin{cases} T|_{\partial\Omega} = 0 & z > 0 \\ T|_{\partial\Omega} = 1 & z < 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} T(\cdot, z) \rightarrow 0 & z \rightarrow +\infty \\ T(\cdot, z) \rightarrow 1 & z \rightarrow -\infty \end{cases}$$

On reformule ensuite cette équation en un système de deux équations à deux inconnues en introduisant le vecteur \mathbf{p} tel que :

$$\partial_z T = Pe v k^{-1} T - k^{-1} \nabla \cdot (\mathbf{p}) \quad (3)$$

$$\partial_z \mathbf{p} = k \nabla T \quad (4)$$

Le système est ensuite écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d}{dz} \Phi(z) = A \Phi(z) \text{ avec } \Phi(z) = \begin{pmatrix} T(z) \\ \mathbf{p}(z) \end{pmatrix}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} Pe v k^{-1} & -k^{-1} \nabla \cdot \\ k \nabla & 0 \end{pmatrix}$$

La solution de notre problème $\Phi(z) \in \mathcal{H}$ ou $\mathcal{H} = L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2$ et $(L^2(\Omega))^2$ l'espace des fonctions vectorielles de carré intégrable sur Ω . \mathcal{H} est un espace de Hilbert auquel on associe le produit scalaire :

$$(\Phi_1, \Phi_2)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} T_1 T_2 k \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 k^{-1} \, dx$$

D'après [9, 10] on peut déterminer les valeurs propres λ_n de A ainsi que les vecteurs propres associés $\psi_n \equiv (T_n, \mathbf{p}_n)$, avec $\mathbf{p}_n = k \nabla T_n / \lambda_n$, qui forment une base de $(\ker A)^\perp = \text{Ran } A$. De plus on peut décomposer cette base en $(\psi_i^+)_{i \in N^*}$ et $(\psi_i^-)_{i \in N^*}$ de sorte que :

$$-\infty \leftarrow \dots \leq \lambda_i^+ \leq \dots \leq \lambda_1^+ < 0 < \lambda_1^- \leq \dots \leq \lambda_j^- \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (5)$$

On nommera amont les modes pour $z < 0$ et aval les modes pour $z > 0$.

Dans notre cas on s'intéresse plus particulièrement à T . Par définition la n -ième fonction propre ψ_n vérifie $A\psi_n = \lambda_n \psi_n$. Si on pose $T(x, y, z) = e^{\lambda_n z} T_n(x, y)$ alors T est une solution de l'équation de l'énergie. On a alors :

$$T = \begin{cases} 1 + \sum_n \alpha_n^- e^{\lambda_n^- z} T_n^- & z \leq 0 \\ - \sum_n \alpha_n^+ e^{\lambda_n^+ z} T_n^+ & z \geq 0 \end{cases}$$

où on définit les coefficients α_n par : $\alpha_n = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{\partial\Omega} k \nabla T_n \cdot \mathbf{n} \, ds$.

3 Formulation variationnelle et résultats

3.1 Formulation variationnelle

Soit $\Phi = \begin{pmatrix} T \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$ solution de (3-4). D'après [10] on peut définir s tel que : $\Phi = \begin{pmatrix} T \\ \nabla s \end{pmatrix}$.

Soient $\Phi_1, \Phi_2 \in (\ker A)^\perp$. La formulation variationnelle de (3-4) s'écrit :

$$\int_{\Omega} (Pe v T_1 T_2 + \nabla s_1 \cdot \nabla T_2 + \nabla s_2 \cdot \nabla T_1) d\Omega = \lambda \int_{\Omega} (k T_1 T_2 + k^{-1} \nabla s_1 \cdot \nabla s_2) d\Omega \quad (6)$$

Nous avons implémenté cette formulation variationnelle en utilisant des éléments finis $P1$ sous FreeFem++ [12]. Notre but est de déterminer le champ de température T dans une section de notre domaine et d'accéder ensuite au flux de température. Nous calculons les valeurs propres et les vecteurs propres λ_n/T_n de l'opérateur A écrit sous la forme variationnelle (6) en utilisant la méthode d'Arnoldi des bibliothèques Lapack [13]. Ces bases nous permettent de reconstruire la solution comme une somme infinie de modes propres tronqués à un ordre arbitraire N .

3.2 Résultats numériques

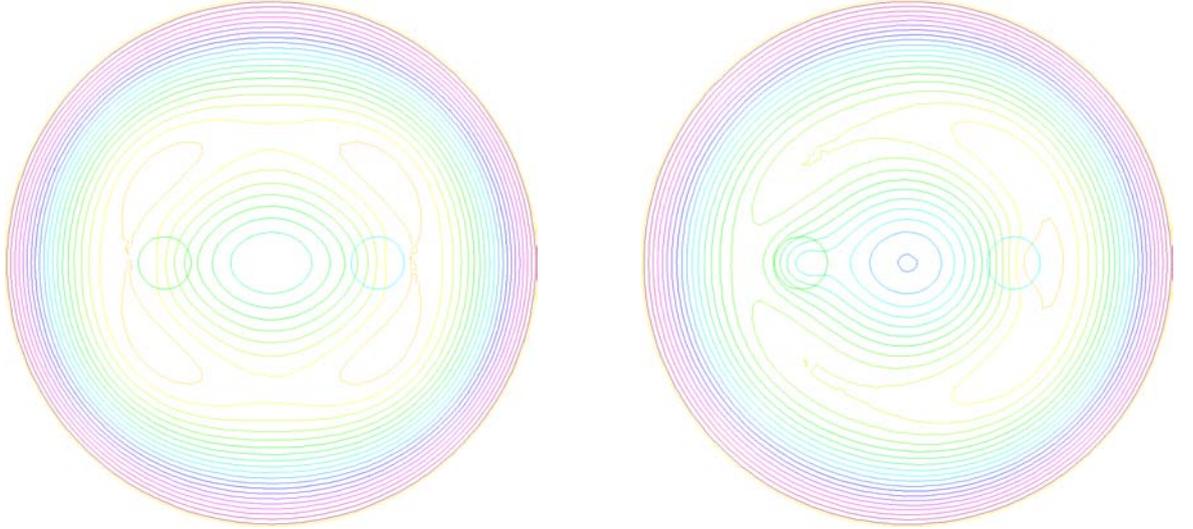


FIG. 2 – Isovaleurs du champ de température pour $Pe=20$ dans une section du domaine pour $z > 0$ pour une configuration de vitesse co-courant à gauche et contre-courant à droite, pour deux tubes de rayons égaux à un quart du rayon du domaine et distant de 0.6 fois le rayon du domaine extérieur.

La figure 2 indique une coupe transverse de la configuration étudiée, pour laquelle deux tubes cylindriques dans lesquels un profil de Poiseuille est établi convectent un champ de température. On voit que la configuration contre-courant génère une dissymétrie du champ de température comparée à celle du cas co-courant symétrique. Les isovaleurs ont tendances à se concentrer vers le tube de gauche, où donc les gradients de température et le transfert thermique est beaucoup plus important que sur le tube de droite. Cette constatation implique que les gradients de température sont beaucoup plus importants sur le tube de gauche. Par symétrie de cette configuration les modes amont du tube de droite sont les modes aval de celui de gauche et réciproquement. Or nous constatons numériquement que la contribution des modes avals est très dominante devant celle les modes amont sur le

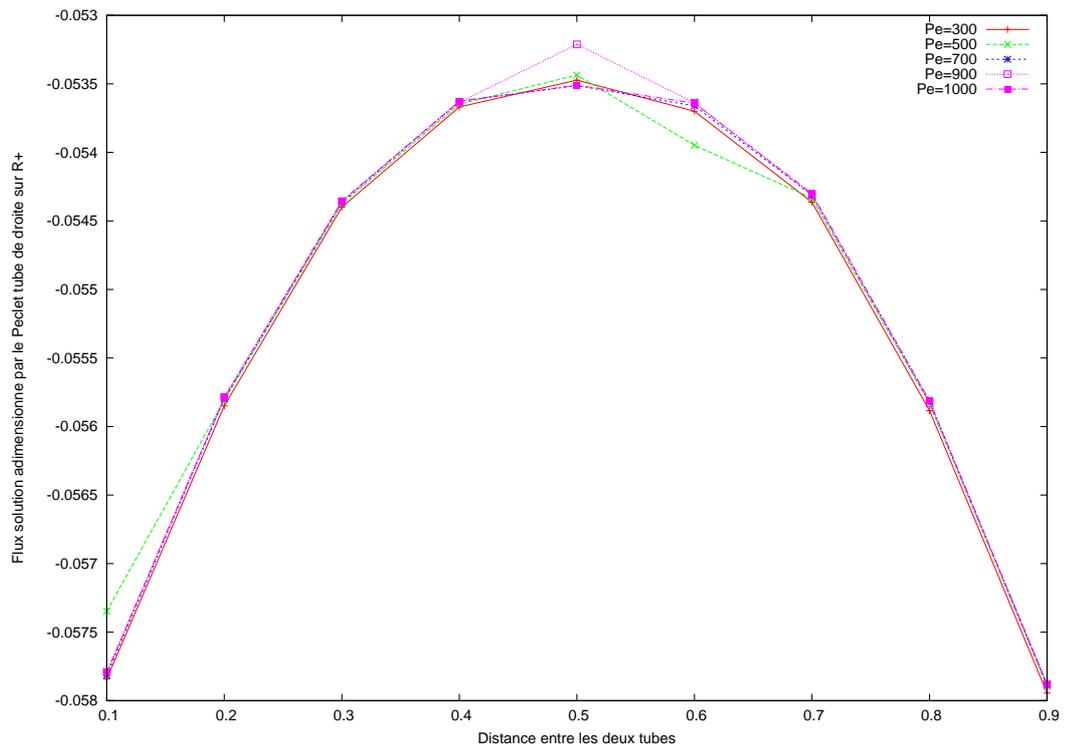


FIG. 3 – Flux adimensionné par le nombre de Péclet sur le tube de droite pour $z > 0$ en fonction de l'écartement entre les deux tubes pour un domaine périodique.

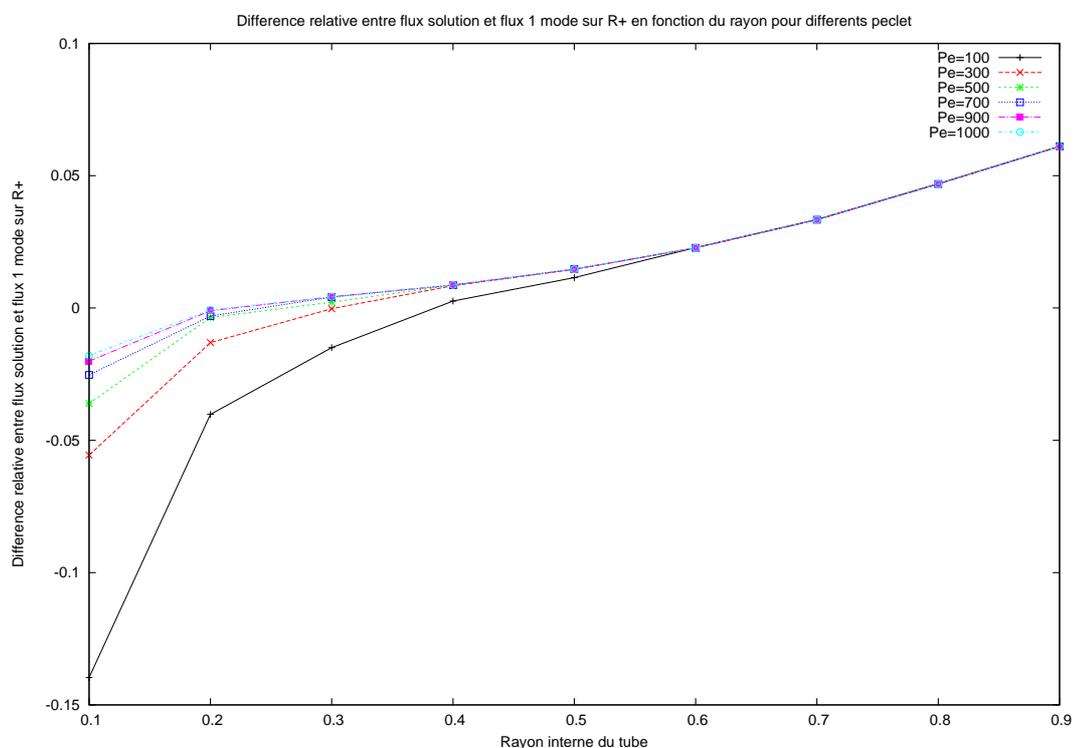


FIG. 4 – Différence relative entre le flux calculé à partir du mode dominant et le flux calculé avec tous les modes pour $z > 0$ en fonction du rayon du tube pour différents nombre de Péclet.

flux. Plus Pe augmente, plus le spectre des valeurs propres se déplace vers \mathbb{R}^+ , diminuant la contribution de la partie amont. C'est pourquoi le transfert est ici dominant dans le tube de gauche, et c'est donc celle qui nous intéressera dans la suite.

Les figures 3 et 4 portent sur l'étude du flux total de chaleur. On observe au regard de la superposition des courbes de la figure 2 que le transfert total est proportionnel au nombre de Péclet. De plus dans cette configuration contre-courant on voit que le transfert augmente légèrement lorsqu'on éloigne les tubes. Outre les variations des échanges avec les paramètres hydrodynamique ou géométriques, on a cherché à évaluer comment la seule contribution du premier mode approxime le flux total. On observe que même pour des Péclet modestes (ici 30), et a fortiori pour des Péclet plus grand, ce seul mode permet une excellente approximation du flux total. Ce constat est encourageant pour développer des stratégies d'approximations basés sur ce seul mode.

4 Conclusions

Nous avons analysé le problème de Graetz généralisé en s'appuyant sur la formulation proposée en [10]. Nous avons conduit une étude paramétrique du champ et du flux de température. Cette étude montre que transfert convectif est proportionnel au nombre de Péclet, et qu'il dépend plus modestement de la configuration géométrique. Il apparait que le flux calculé à partir du mode dominant, dans la partie amont ou aval du spectre donne une excellente approximation du flux total sur une large gamme de paramètres. Enfin nous montrons que les transferts dans la zone amont sont très petit comparés à ceux de la zone aval. Cet écart augmente lorsque le nombre de Péclet croît, ce qui déplace le spectre des valeurs propres vers \mathbb{R}^+ , c'est à dire limite considérablement la taille de la zone d'échange dans la zone amont, comme analysé en détail dans une configuration axi-symétrique en [9].

Références

- [2] Graetz L., 1885, Über die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten, *Annalen der Physik*, **261**,(7),pp. 337-357
- [6] Papoutsakis E., Ramkrishna D., and Lim H-C., 1910, The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions, *Appl. Sci. Res.*, **36**,pp. 13-34
- [7] Papoutsakis E., Ramkrishna D., and Lim H-C., 1910, Conjugated Graetz problems. Pt.1 : general formalism and a class of solid-fluid problems, *Chemical Engineering Science*, **36**,(8),pp. 1381-1391
- [8] Papoutsakis E., Ramkrishna D., and Lim H-C., 1910, Conjugated Graetz problems. Pt.2 : fluid-fluid problems, *Chemical Engineering Science*, **36**,(8),pp. 1392-1399
- [9] Pierre C. and Plouraboué F., 2007, Stationary convection diffusion between two co-axial cylinders, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **50**,(23-24),pp. 4901-4907
- [10] Pierre C. and Plouraboué F., 2009, Numerical analysis of a new mixed-formulation for eigenvalue convection-diffusion problems, *SIAM Applied Maths*, **70**,(3),pp. 658-676
- [11] Degournay F., Fehrenbach J., Pierre C. and Plouraboué F., 2011, Generalized Graetz problem in finite domains, *under submission*, 2011
- [12] <http://www.freefem.org/ff++/>
- [13] <http://www.netlib.org/lapack/>